УДК 519.6

© **С. П. Копысов, Ю. А. Сагдеева**

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ МКЭ И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ[1]

В работе предлагается метод получения эффективных (осредненных) оценок упругих характеристик композитов, основанный на многомасштабной декомпозиции функции с помощью вейвлет-разложения Хаара. Характеристики композитов, например, тензор упругости и поля перемещений, являются быстроосциллирующими функциями. Вейвлет-преобразование позволяет получить осредненное (глобальное) поведение этих неизвестных быстроменяющихся величин. Преобразование применяется к системе линейных алгебраических уравнений, полученной с помощью метода конечных элементов:

$$Ax = b, \qquad A = (a_{ij}), \quad b = (b_i), \quad x = (x_i), \quad i, j = 1 \dots 2^n. \tag{1}$$

Данная система получается при решении некоторого операторного уравнения $Lu = f$, где L — дифференциальный оператор, u — неизвестная функция.

Применим к (1) ортогональное одномерное вейвлет-преобразование Хаара W. При этом получим систему блочного вида. Вектор неизвестных представляется в виде совокупности компонент двух видов — вектора, отвечающего за грубое (осредненное) приближение и вектора уточняющих деталей, то есть вектор неизвестных x проектируется на пространство V_n кусочно-постоянных функций. В результате получим

$$W_n A x = W_n b, \quad W_n A W_n^T W_n x = W_n b,$$

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} A(P_n^T Q_n^T) \begin{pmatrix} x_{n-1}^c \\ x_{n-1}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1}^c \\ b_{n-1}^d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_n A P_n^T & P_n A Q_n^T \\ Q_n A P_n^T & Q_n A Q_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^c \\ x_{n-1}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1}^c \\ b_{n-1}^d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Осредненный вектор x_{n-1}^c (этот вектор имеет вдвое меньше координат, чем исходный) выражается из последнего уравнения с помощью дополнения Шура. Введем обозначения

$$K_{11} = Q_n A Q_n^T, \qquad K_{12} = Q_n A P^T, \qquad K_{21} = P_n A Q_n^T, \qquad K_{22} = P_n A P_n^T,$$

$$x_1 = x_{n-1}^d, \qquad x_2 = x_{n-1}^c, \qquad b_1 = b_{n-1}^d, \qquad b_2 = b_{n-1}^c,$$

и перепишем систему (2) в виде

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Выразив x_1 из первого уравнения и подставив его во второе, получим систему

$$Sx_2 = b, \quad \text{где } S \text{ – дополнение Шура} \tag{3}$$

$$S = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}, \quad b = b_2 - K_{21} K_{11}^{-1} b_1.$$

Разрешив (3) получаем искомое осредненное решение x_2.

При необходимости дальнейшего осреднения, к системе (3) можно опять применить вейвлет-преобразование. Таким образом, рекурсивно используя вейвлет-преобразование несколько раз,

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №06-07-89015.

можно найти грубое представление вектора x на нужном масштабе. Причем на самом грубом масштабе получается система из одного уравнения. Система (3) считается осредненной системой для (1).

Численные результаты получены при применении двумерного и одномерного вейвлет-преобразований к статической одноосной задаче теории упругости. Сначала проводится осреднение поля перемещения, а затем вычисляются осредненный модуль Юнга. Процедура осреднения тестировалась на нескольких примерах, которые демонстрируют основные свойства вейвлет-осреднения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с периодическим коэффициентом $a(x)$, принимающим попеременно значения 1 или 100:

$$-(a(x)u')' = 10, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

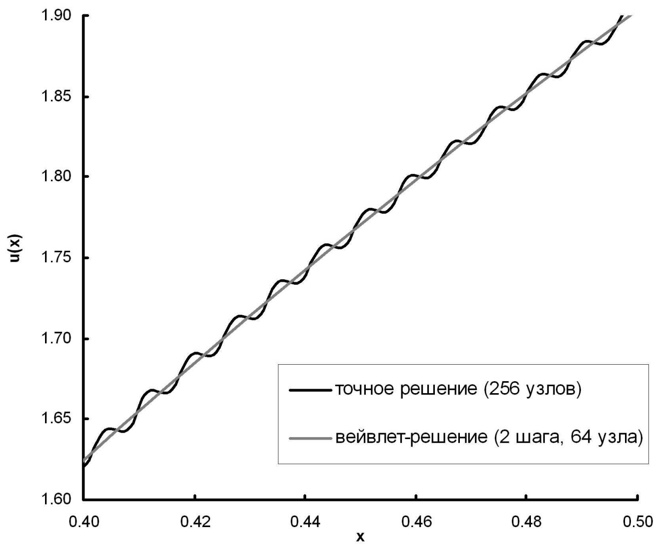

Рис. 1: Пример: решение, 2 шага осреднения

На рисунке 1 представлен фрагмент решения, осредненного с помощью двух шагов вейвлет-преобразования (грубая сетка состоит из 64-х узлов) и численного решения уравнения, полученного с помощью МКЭ на сетке из 256-ти узлов. Отметим, что решение исходного неосредненного уравнения имеет волнообразно-ступенчатую форму, а осредненное решение располагается вблизи точного решения и является его сглаженным представлением.

Проведено сравнение для различных объемных долей включений, для различного числа включений и сеток различной степени мелкости. Кроме того, полученные значения сравниваются с аналитическими оценками и оценками асимптотического метода осреднения.

Копысов Сергей Петрович
Институт прикладной механики
УрО РАН,
Россия, Ижевск
e-mail: kopysov@udman.ru

Сагдеева Юлия Альбертовна
Институт прикладной механики
УрО РАН,
Россия, Ижевск
e-mail: sagdeeva@yandex.ru